Die Formelsammlungen sind teilweise stark veraltet (Vorlesungsinhalte aus vergangenen Semestern, alte Normen...) und sollten lediglich als Hilfestellung zum Verfassen eigener Formelsammlungen dienen. Kontrolliert auf jeden Fall die Formeln, es haben sich auch Fehler eingeschlichen.

TM2 Formelsammlung

Jan Höffgen

24. Juni 2012

Wer einen Fehler findet, meldet ihn bitte an Zusammenfassungen@me.com,
damit ich eine korrigierte Version in Umlauf bringen kann.

Zug und Druck in Stäben

Normalspannung: $\sigma(x) = \frac{N(x)}{A(x)},\ \sigma(x) = E \cdot \varepsilon(x),\ N'(x) = -n,$ **Eigengewicht**: $n(x) = \gamma \cdot A(x)$

mittlere Dehnung: $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L},$ **lokale Dehnung**: $\varepsilon(x) = u'(x) = \frac{N(x)}{EA} + \alpha_T \cdot \Delta T$ (u: Verschiebung)

Schnittprinzip: n-fache statische Unbestimmtheit $\rightarrow$ n Bindungen lösen und durch unbekannte Kraftgrößen $X^1...X^n$ paarweise ersetzen $\rightarrow$ SG'en im stat. best. Gesamtsystem ermitteln (0- bis n-Lastfall) $\rightarrow$ Verschiebung u_{ik} an der Stelle der Unbestimmten i mit der Last aus Lastfall k $\rightarrow$ Kompatibilität der Verschiebungen $\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} u_{1k} \\ \vdots \\ u_{nk} \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ SG'en im Gesamtsystem $(N, Q, M) = \sum_{k=0}^{n} (N_k, Q_k, M_k) = \sum$Lastfälle

Ebener Spannungszustand und Spannungstransformation

positive Spannungen zeigen am positiven Schnittufer in positive Koordinatenrichtung

Drehung des Koordinatensystems:

$$\sigma_\xi = \tfrac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \tfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos(2\varphi) + \tau_{xy}\sin(2\varphi)$$
$$\sigma_\eta = \tfrac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \tfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos(2\varphi) - \tau_{xy}\sin(2\varphi)$$
$$\tau_{\xi\eta} = -\tfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin(2\varphi) + \tau_{xy}\cos(2\varphi)$$

Hauptspannungen: $\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2 + \tau_{xy}^2},\ \tau_{1,2} = 0,$ **Hauptrichtung**: $\tan(2\varphi^*) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}$

Hauptschubspannungen: $\tau_{max} = \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2},$ **Hauptschubrichtungen**: $\varphi^{**} = \varphi^* + 45°$

Kesselformeln: Schnitt längs: $\sigma_x = \frac{r}{2t}p_i,$ Schnitt quer/Kugel: $\sigma_\varphi = \frac{r}{t}p_i$

Balkenbiegung

Flächenträgheitsmomente: achsiales FTM: $I_y = \int_A z^2 dA,\ I_z = \int_A y^2 dA$, Deviationsmoment: $I_{yz} = \int_A yz dA$, polares FTM: $I_p = \int_A r^2 dA = \int_A (y^2 + z^2) dA = I_y + I_z$

Drehung der Achsen:

$$I_\eta = \tfrac{1}{2}(I_y + I_z) + \tfrac{1}{2}(I_y - I_z)\cos(2\varphi) - I_{yz}\sin(2\varphi)$$
$$I_\xi = \tfrac{1}{2}(I_y + I_z) - \tfrac{1}{2}(I_y - I_z)\cos(2\varphi) + I_{yz}\sin(2\varphi),$$
$$I_{\eta\xi} = \tfrac{1}{2}(I_y - I_z)\sin(2\varphi) + I_{yz}\cos(2\varphi)$$

Verschiebung:

$$I_y = I_{\overline{y}} + (z_s)^2 A$$
$$I_z = I_{\overline{z}} + (y_s)^2 A$$
$$I_{yz} = I_{\overline{yz}} + (y_s \cdot z_s) A$$

Hauptträgheitsmomente $I_{1,2} = \frac{I_y+I_z}{2} \pm \sqrt{(\frac{I_y-I_z}{2})^2 + I_{yz}^2},$ **Hauptrichtungen**: $\tan(2\varphi^*) = \frac{-2I_{yz}}{I_y-I_z}$

Biegenormalspannungen $\sigma_x(z) = \frac{M_y}{I_y}z$ Formeln für Biegung nur im H.A.S gültig

max. Spannung am Rand mit z_{max}: $\sigma_{max} = \frac{M}{I} \cdot |z_{max}| = \frac{M}{W}$ mit **Widerstandsmoment** $W = \frac{I}{z_{max}}$

Dimensionierung: $|\sigma_{max}| = \sigma_{zul} = \frac{|M|}{W}$

DGL der Biegelinie: $EIw'''(x) = -Q(x) \Leftrightarrow EIw''(x) = -M(x) \Leftrightarrow w'(x):$ Verdrehung $\Leftrightarrow w(x):$ Durchbiegung

Schub infolge Querkraft: $\tau(z) = \frac{Q_z \cdot S_y(z)}{I_y \cdot b(z)}$ mit $S_y(z) =$ **Statisches Moment** $= \int_A z dA = \sum A_i \cdot z_i$

Schiefe Biegung: Spannungsgleichung: $\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_\eta}{I_\eta}\zeta - \frac{M_\zeta}{I_\zeta}\eta$ Vorgehen: SGen, N, M_η, M_ζ und evtl. in H.A.S. transformieren $\Rightarrow$ Spannungsgleichung $\Rightarrow$ Spannungsnulllinie: $\sigma(\eta, \zeta) = 0 \rightarrow \zeta = c_1 + c_2 \cdot \eta \Rightarrow$ Spannungsnulllinie in Querschnitt einzeichnen $\Rightarrow \sigma_{max}$ an dem Punkt, der den größen senkrechten Abstand zur Nulllinie hat

Torsion

DGL der **Verdrehung** ϑ: $GI_T \cdot \vartheta'' = -m_T \Leftrightarrow GI_T \cdot \vartheta' = -m_T x + c_1 = M_T(x) \Leftrightarrow GI_T \cdot \vartheta = -\frac{1}{2}m_T x^2 + c_1 x - c_2$

Kreiswelle: $\tau = \frac{M_T}{I_T}r,\ I_T = I_P = \frac{\pi}{2}R^4$

Dünnwandiger geschlossener Querschnitt: $\tau(s) = \frac{M_T}{2A_m t(s)},\ I_T = \frac{4A_m^2}{\oint \frac{ds}{t}}$ (Sonderfall: t=const. $\rightarrow I_T = \frac{4A_m^2}{U}$)

Der Arbeitssatz (Berechnung von Verformungen)

Inneres Potential= Äußere Verformung: $W_a = \frac{1}{2}Fu = \frac{1}{2}M\varphi,\ \Pi_i = \frac{1}{2}(\int_x \frac{N^2}{EA}dx + \int_x \frac{M^2}{EI}dx + \int_x \frac{M_T^2}{GI_T}dx)$, FW: $\Pi_i = \frac{1}{2}\sum \frac{S_i^2 \cdot l_i}{(EA)_i}$

Prinzip der virtuellen Kräfte $\varphi_{ik}, f_{ik} = \int_x \frac{N \cdot \bar{N}}{EA}dx + \int_x \frac{M \cdot \bar{M}}{EI}dx + \int_x \frac{M_T \cdot \bar{M}_T}{GI_T}dx$, FW: $f_{ik} = \sum \frac{S_i \cdot \bar{S}_i \cdot l_i}{(EA)_i}$

α_{ik}: **Einflusszahlen**, $f_{ik} = \alpha_{ik}F_k$ (α_{ik}: Verschiebung bei i infolge „1" an der Stelle k), $f_{ges} = \sum_k f_{ik}$, **Maxwell**: $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$

Anwendung des PdvK auf **statisch unbestimmte Systeme**: n-fach stat. unbest $\rightarrow$ n Bindungen durch entsprechende Kraftgrößen $X^1..X^n$ ersetzen $\rightarrow$ SGen im 0- bis n-Lastfall $\rightarrow$ Verformungsgrößen $\alpha_{ik} = \int_x \frac{N^i N^k}{EA} + \int_x \frac{M^i M^k}{EI} + \int_x \frac{M_T^i M_T^k}{GI_T}$

(Stelle i, Ursache k) $\rightarrow$ Kompatibilität: $\begin{pmatrix} \alpha_{10} \\ \vdots \\ \alpha_{n0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^n \end{pmatrix} = \vec{0} \rightarrow$ Statisch Unbestimmte X^n berechnen

Knicken: Knicklast: $F_k = \frac{\pi^2 EI}{l_k^2}$ EF1: $l_k = 2l$ EF2: $l_k = l$ EF3: $l_k = \sqrt{2}l$ EF4: $l_k = 0,5l$

J.H.

Beispiele FTM
Recheck: $I_y = \frac{bh^3}{12}, I_z = \frac{b^3h}{12}$
Kreisscheibe: $I_y = I_z = \frac{\pi r^4}{4}$
Kreisring: $I_y = I_z = \frac{\pi}{4}(R_a^4 - R_i^4)$
dünnwandiger Kreisring: $I_y = I_z = \pi R_m^3 t$
Ellipse: $I_z = \frac{\pi}{4}ba^3, I_y = \frac{\pi}{4}a^3b$
Quadrat: jedes gedrehte System ist H.A.S.

Balkenbiegung
Balken: QS « L
Voraussetzungen: y- und z-Achsen sind H.A.
QS symmetrisch zur z-Achse: Querkräfte in z-Richtung und Momente um y
Annahmen: σ_y, σ_z vernachlässigbar klein gegenüber σ_x, Verschiebung w unabhängig von z (alle Punkte eines QS erfahren gleiche Verschiebung), ebene QS bleiben eben $\Rightarrow$ QS um w abgesenkt und gedreht

DGL der Biegelinie
Annahme: Schubsteifigkeit sehr groß (schubstarr) $\Rightarrow$ keine Winkeländerung durch Querkraft

Schub
Annahme: τ: nur Komponente in z-Richtung wesentlich, unabhängig von y $\rightarrow$ mittlere Schubspannung

Torsion
Kreiszylindrische Welle: Annahmen: QS verdrehen sich als Ganzes (Geraden bleiben Geraden), ebene QS bleiben eben
Dünnwandiger geschlossener QS: Annahme: Schub über Wanddicke konstant (Schubfluss $T = r \cdot \sum t$), Voraussetzung: QS verwölbt sich

Knicken
Voraussetzungen: Stab exakt gerade, F durch SP (sonst Knicken bei $F < F_{krit}$ möglich)
Herleitung: $EI = const. \rightarrow w^{IV} + \lambda^2 w'' = 0$ mit $\lambda = \frac{F}{EI}$
$\Rightarrow$ allgemeine Lösung: $w = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x + C\lambda x + D$